Zápočtový test z MA2, varianta B **9. 5. 2017**

1. Vhodným způsobem integrace spočítejte integrál

$$\iint_E y^2 \, \mathrm{d}S,$$

kde

$$E: \quad y^2 \leq 2x \quad \& \quad y \geq x - 4$$

Oblast E načrtněte.

Řešení:
Oblast je vnitřní část paraboly $\frac{y^2}{2} = x$ (obrácené v směru osy x), která je oříznutá šikmo přímkou $y = x - 4$. Zintegrujeme postupně nejdříve podle x (tj. rozřežeme E vodorovně) a pak podle y. K tomu potřebujeme zjistit rozsah proměnné y (tj. průmět oblasti E na osu y), neboli průniky hyperboly s přímkou:

$$y^2 = 2x \quad \wedge \quad y = x - 4$$
$$y^2 = 2(y + 4)$$
$$0 = y^2 - 2y - 8 = (y - 4)(y + 2)$$

Množinu E tedy zapíšeme jako

$$E: \quad -2 \leq y \leq 4 \quad \& \quad \frac{y^2}{2} \leq x \leq y + 4$$

Takže máme

$$\iint_E y^2 \, \mathrm{d}S = \int_{-2}^{4} \int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{-2}^{4} y^2 \left(y + 4 - \frac{y^2}{2} \right) \, \mathrm{d}y = \int_{-2}^{4} y^3 + 4y^2 - \frac{y^4}{2} \, \mathrm{d}y =$$

$$= \left[\frac{y^4}{4} + 4 \cdot \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{10} \right]_{-2}^{4} = 64 + \frac{256}{3} - \frac{512}{5} - 4 + \frac{32}{3} - \frac{16}{5} =$$

$$= 60 + \frac{288}{3} - \frac{528}{5} = 50 + \frac{2}{5} \, .$$

2. Spočítejte objem tělesa

$$A: \quad x^2 + y^2 \leq 4 \quad \& \quad y + z \leq 2 \quad \& \quad z \geq 0.$$

Těleso A načrtněte.

Řešení:
Těleso A je částí svisle postaveného válce o průměru 2, který je seříznutý dole vodorovně a nahoře pod úhlem 45°. Použijeme proto cylindrické souřadnice:

$$\Phi: \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \qquad z = h \, .$$

Oblast parametrizace U tak bude

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq r \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq h \leq 2 - r\sin\varphi \ .$$

Pak dostáváme

$$\textit{objem } A = \iiint\limits_{A=\Phi(U)} 1 \ \mathrm{d}V = \iiint\limits_{U} r \ \mathrm{d}h \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2} \int\limits_0^{2-r\sin\varphi} r \ \mathrm{d}h \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2} 2r - r^2 \sin\varphi \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left[r^2 - \tfrac{r^3}{3} \sin\varphi \right]_{r=0}^{r=2} \ \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left(4 - \tfrac{8}{3}\sin\varphi\right) \mathrm{d}\varphi = 8\pi \ .$$